



Recursos per a l'aula  
(batx.)

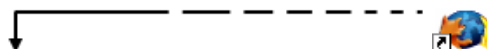
## DEL MOVIMENT DELS COSSOS EN SECCIONS CÒNIQUES

Victor Curcó

La relació que hi ha entre l'òrbita el·líptica, la hipèrbola o la paràbola que descriu un cos astronòmic al voltant del Sol i la llei de l'invers del quadrat de la distància es pot deduir utilitzant una expressió aproximada per la força que s'obté a partir d'idees bàsiques de física i matemàtiques de primer i segon de batxillerat i fent mesures en la trajectòria amb programari lliure.

## Introducció

Quin tipus de força fa que un planeta descriuï una òrbita el·líptica? En general, hi ha poques experiències relacionades amb la llei de la gravitació universal que es portin a terme amb l'alumnat de secundària i que suposin efectuar algun tipus de mesura. A continuació, proposem una experiència que es pot presentar a l'alumnat de diferents maneres. La idea original apareix a la revista *The Physics Teacher* de gener de 2007, a l'article de Prentis *et al.* [1]. En essència, es tracta d'una adaptació de la fórmula del corol·lari 5 de la proposició VI del llibre I dels *Principis matemàtics de filosofia natural* de Newton i les aplicacions subsegüents dels problemes VI, VII i VIII (o proposicions XI, XII, XIII).



## Guia del professorat

### Antecedents històrics

Al corol·lari 5 de la proposició VI del llibre I dels *Principis matemàtics de filosofia natural*, Newton demostra que si un cos es mou segons la trajectòria  $\widehat{APQ}$  (vegeu la figura 1) i  $S$  és el punt cap a on es dirigeix la força centrípeta, aquesta es inversament proporcional a:

$$\frac{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2}{\overline{QR}}$$

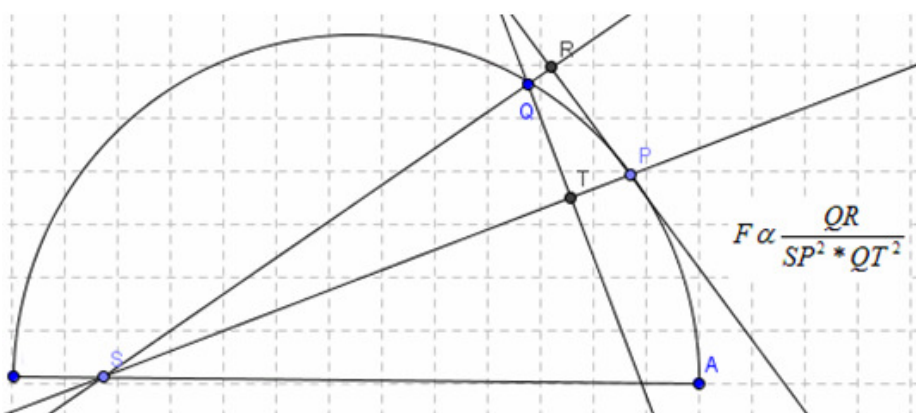


Fig. 1: Fórmula del corol·lari 5 de la proposició VI del llibre I dels *Principis matemàtics de filosofia natural* de Newton.

O bé d'una altra manera

$$F \propto \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2}$$

(1)



intervals de temps iguals, per la qual cosa tenim  $t \propto A$ , i en conseqüència:

$$F \propto \frac{\overline{IJ}}{A^2} \quad (5)$$

Cal que recordem que el compliment de la segona llei de Kepler ( que equival a la conservació del moment angular) no suposa que la força sigui del tipus  $F \propto \frac{1}{r^2}$ , n'hi ha prou que es tracti d'una força central.

Quan tenim  $\overline{IJ} \rightarrow 0$  o  $I \rightarrow H$ , podem aproximar l'àrea del sector escombrat pel radi vector  $\overline{GH}$  per l'àrea del triangle  $\widehat{GHI}$

$$A = \frac{1}{2}(\overline{GH} \cdot \overline{IK}) \quad (6)$$

I finalment si substituïm (6) a (5), obtenim que:

$$F \propto \frac{\overline{IJ}}{(\overline{GH} \cdot \overline{IK})^2} \quad (7)$$

és a dir, tenint en compte els canvis de notació, obtenim (1).

S'ha de fer notar a l'alumnat que en l'expressió (7), si prescindim de la constant de proporcionalitat, la força que actua sobre el planeta té unitats de  $[L^{-3}]$ . També que en la deducció anterior no s'ha utilitzat enlloc que la trajectòria sigui justament una el·lipse. Ara es tracta precisament de fer servir (7) per veure que, **si es tracta d'una el·lipse**

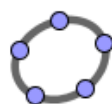
**resulta  $F \propto \frac{1}{r^2}$  !.**

L'expressió (7) pot ser explicada a l'estudiantat de batxillerat sense gaires problemes. A partir d'aquest punt, suposarem que l'estudiantat coneix aquesta expressió. El procediment general de dibuixar una el·lipse i dur a terme les mesures corresponents es pot fer amb programari lliure. Un bon programa és:

GeoGebra - Dynamic Mathematics for  
Schools

Markus Hohenwarter, 2001-2007

<http://www.geogebra.org>



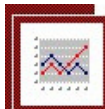
GeoGebra

De tota manera, amb precisió suficient es pot fer el mateix dibuixant (no virtualment) una el·lipse força gran. A la fitxa de l'estudiantat no suposarem necessàriament l'existència de cap programa.

Un cop tenim les mesures  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{GH}$  i  $\overline{IK}$  (per a una col·lecció de punts  $H_i$ ) podem calcular  $F = \frac{\overline{IJ}}{(\overline{GH} \cdot \overline{IK})^2}$

( en unitats  $[L^{-3}]$  ) i fer la gràfica d'aquesta quantitat enfront de  $r = \overline{GH}$ . Finalment, cal ajustar aquesta gràfica a

una corba del tipus  $F = A r^B$ , on caldrà trobar els paràmetres  $A$  i  $B$ . Això es pot fer també amb el programari lliure:



RJS  
**Graph 2004**  
RJS OFFICE

Version 3.21.15

RJS Graph  
Robert Jackson Software.  
<http://www.rjsweb.fsnet.co.uk/graph>

El podeu descarregar també [aquí](#)

This product is licensed to

Robert Jackson  
RJS

Copyright© 1997-2004 RJS Corporation.  
All rights reserved. This programme is protected by UK  
and international copyright laws.

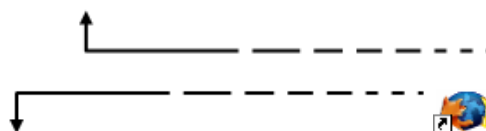
També podem fer servir el programa no gratuït:

Rt-Plot  
Horst Reichert.  
<http://www.rt-science.de/rt-plot.html>

**Plot**

És cert que no hi ha una alternativa manual raonable per fer l'ajust.

A la fitxa de l'estudiantat es detallen aquests procediments amb més profunditat.



## Fitxa de l'estudiantat

### Objectiu

Mesurar els paràmetres  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{GH}$  i  $\overline{IK}$  en diferents punts d'una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola i aplicar la

fórmula  $F \propto \frac{\overline{IJ}}{(\overline{GH} \cdot \overline{IK})^2}$  per trobar la llei de la força a la qual està sotmès un cos que es mou segons aquest tipus de trajectòries.

**1) Amb el programa GeoGebra:** dibuixem una el·lipse de, per exemple,  $a=6$  unitats de semieix major i  $b=4$  unitats de semieix menor, amb el mètode dels 5 punts.

**1') Sense el programa:** dibuixem una el·lipse sobre una cartolina prou gran utilitzant la condició: la suma de les distàncies d'un punt qualsevol de la el·lipse als focus es manté constant. Escollim els focus  $G$  i  $F$  convenientment.

**2) Amb el programa GeoGebra:** cal determinar els focus  $G$  i  $F$  de l'el·lipse; la distància del centre de l'el·lipse als focus és:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

**2')** Sense el programa: ja tenim els focus determinats per construcció ( en el pas **1'** hem escollit uns focus)

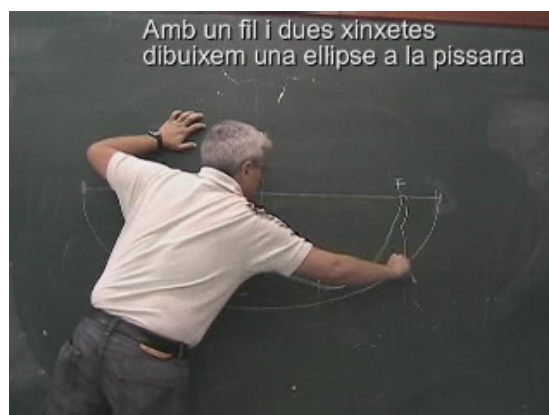


Fig. 4

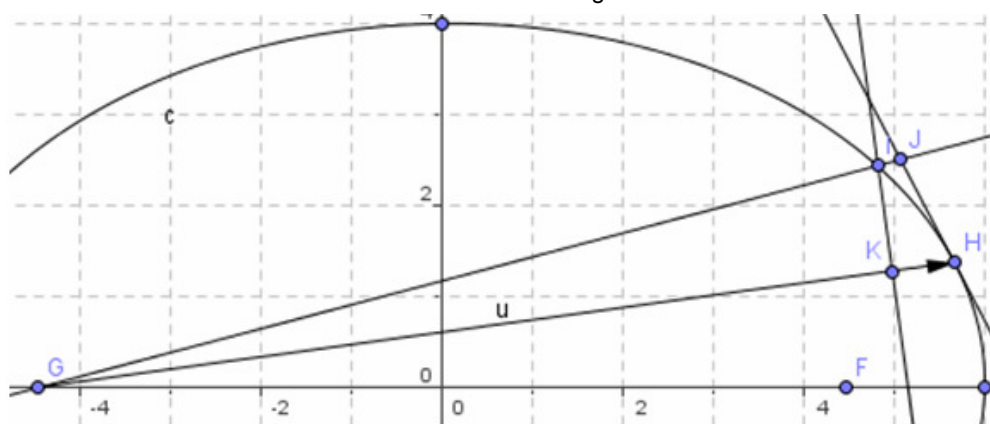


Fig. 3: Procediment constructiu amb el programa GeoGebra

**3)** Decidim en quin dels focus situem el Sol, en el nostre cas **G** (vegeu la figura 3). Assenyallem un punt **H** a l'el·lipse

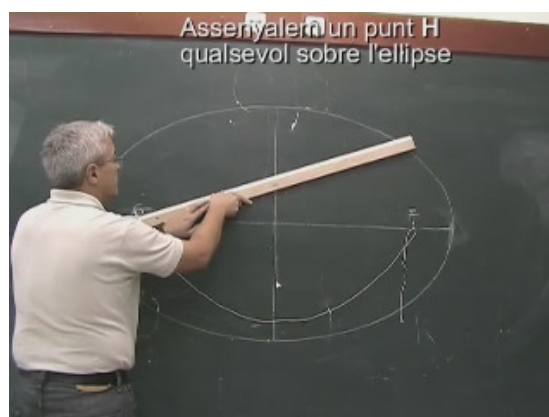


Fig. 5

**4)** Dibuixem la tangent a l'el·lipse que passa pel punt **H**.

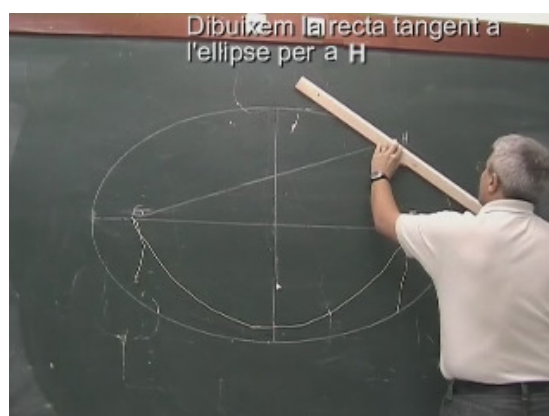


Fig. 6

5) Assenyalem un altre punt **I** a l'el·lipse que sigui proper a **H** i dibuixem la recta que passa per **G** i **H**.

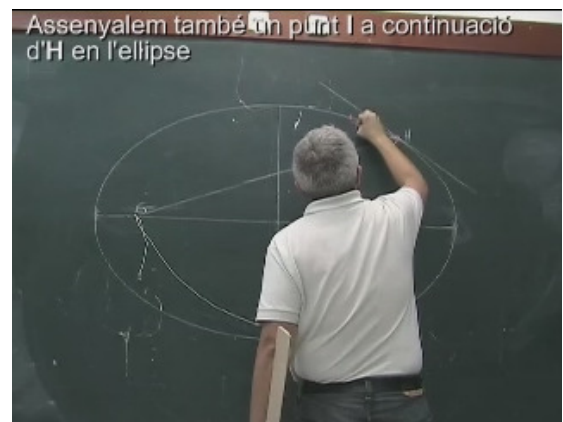


Fig. 7

6) La recta que passa per **G** i **H** talla la recta tangent a l'el·lipse que passa per **H** en el punt **J**.

7) Dibuixem la perpendicular a  $\overline{GH}$  que passa per **I** i que talla a  $\overline{GH}$  en el punt **K**.

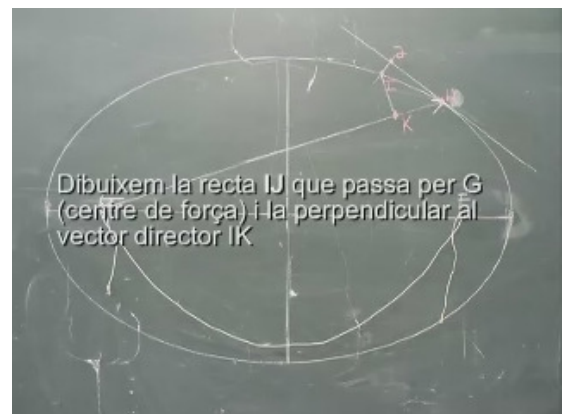


Fig. 8

8) Ara, mesurem del les distàncies  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{GH}$ ,  $\overline{IK}$  per avaluar la força mitjançant l'expressió:

$$F = \frac{\overline{IJ}}{(\overline{GH} \cdot \overline{IK})^2}$$



Fig. 9

9) Repetim els passos de 4 a 8 per diferents punts **H<sub>i</sub>** de l'el·lipse.

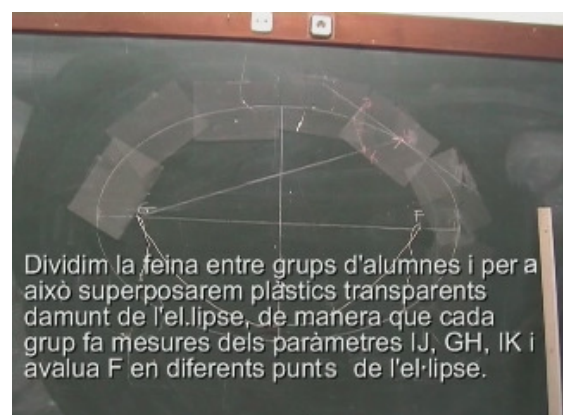


Fig. 10

10) Utilitzem el programari adequat per representar la força obtinguda  $F$  en funció de la distància  $r = \overline{GH}$

11) Utilitzem el programari adequat per ajustar aquesta gràfica a una corba del tipus  $F = Ar^B$ , en que caldrà trobar-hi els paràmetres  $A$  i  $B$ .

12) Opcionalment, es pot repetir el procediment per a trajectòries parabòliques o hiperbòliques.

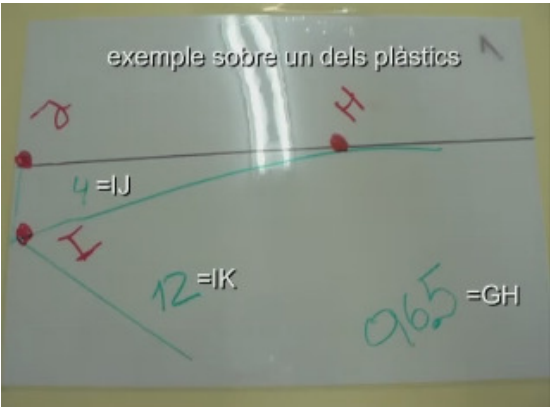
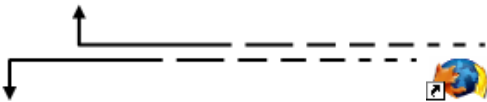


Fig. 11



## Solucions

### El·lipse

A la taula 1 es recullen els valors de  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{IK}$ ,  $\overline{GH}$  (mesurats amb el programa GeoGebra) en una el·lipse d'exemple. Les unitats (u) són convencionals.

| $\overline{IJ}$ (u) | $\overline{IK}$ (u) | $\overline{GH} = r$ (u) | $F (u^{-3})$ |
|---------------------|---------------------|-------------------------|--------------|
| 0,291               | 1,220               | 10,467                  | 0,00178      |
| 0,281               | 1,203               | 10,359                  | 0,00181      |
| 0,277               | 1,179               | 9,928                   | 0,00202      |
| 0,275               | 1,174               | 9,719                   | 0,00211      |
| 0,259               | 1,153               | 9,010                   | 0,00240      |
| 0,281               | 1,164               | 8,248                   | 0,00305      |
| 0,288               | 1,161               | 7,495                   | 0,00380      |
| 0,268               | 1,139               | 6,740                   | 0,00445      |
| 0,274               | 1,135               | 5,996                   | 0,00592      |
| 0,261               | 1,117               | 5,254                   | 0,00758      |
| 0,260               | 1,104               | 4,468                   | 0,01069      |

Taula 1: Relació entre força i distància al focus de l'el·lipse

Si representem gràficament la força en funció de la distància amb un programari científicogràfic i utilitzem l'opció que permet ajustar els

punts experimentals a la millor corba, obtenim una llei de dependència entre força i distància proporcional a l'invers de la distància al quadrat amb una molt bona aproximació (vegeu la figura 12):

$$F \propto \frac{1}{r^{2,10}}$$

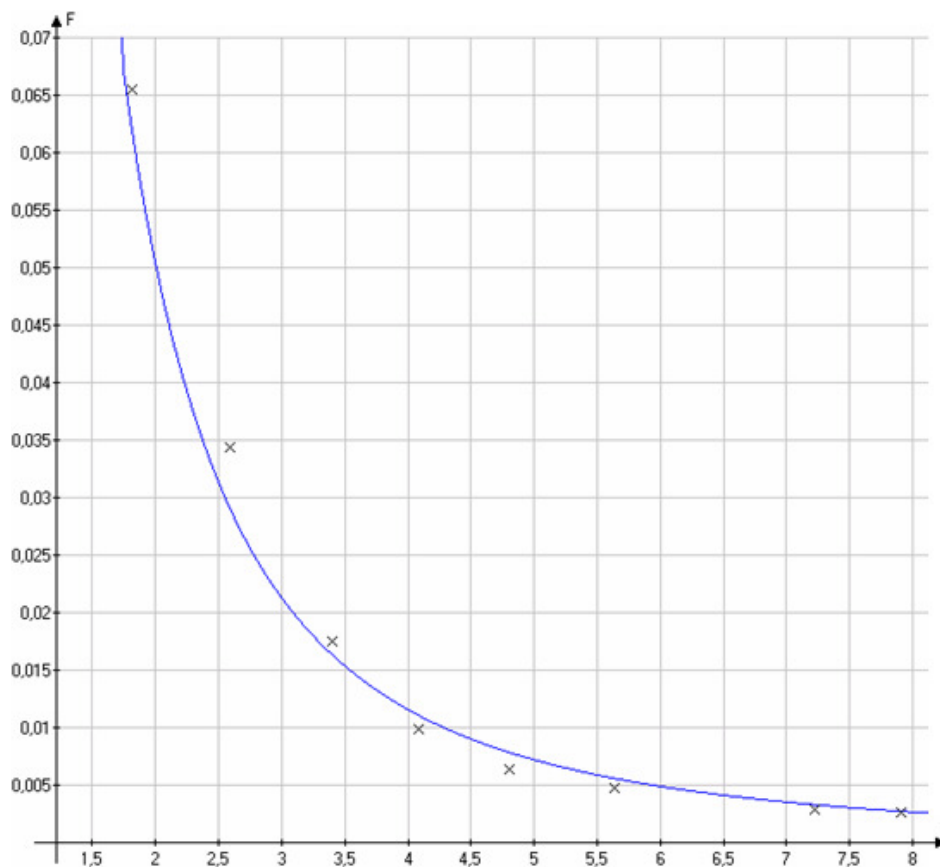


Fig. 12: Llei de força versus distància obtinguda en una el·lipse

## Paràbola

Si repetim el procediment per una paràbola (figura 13), també obtenim el mateix tipus de llei .

$$F \propto \frac{1}{r^{2,14}}$$



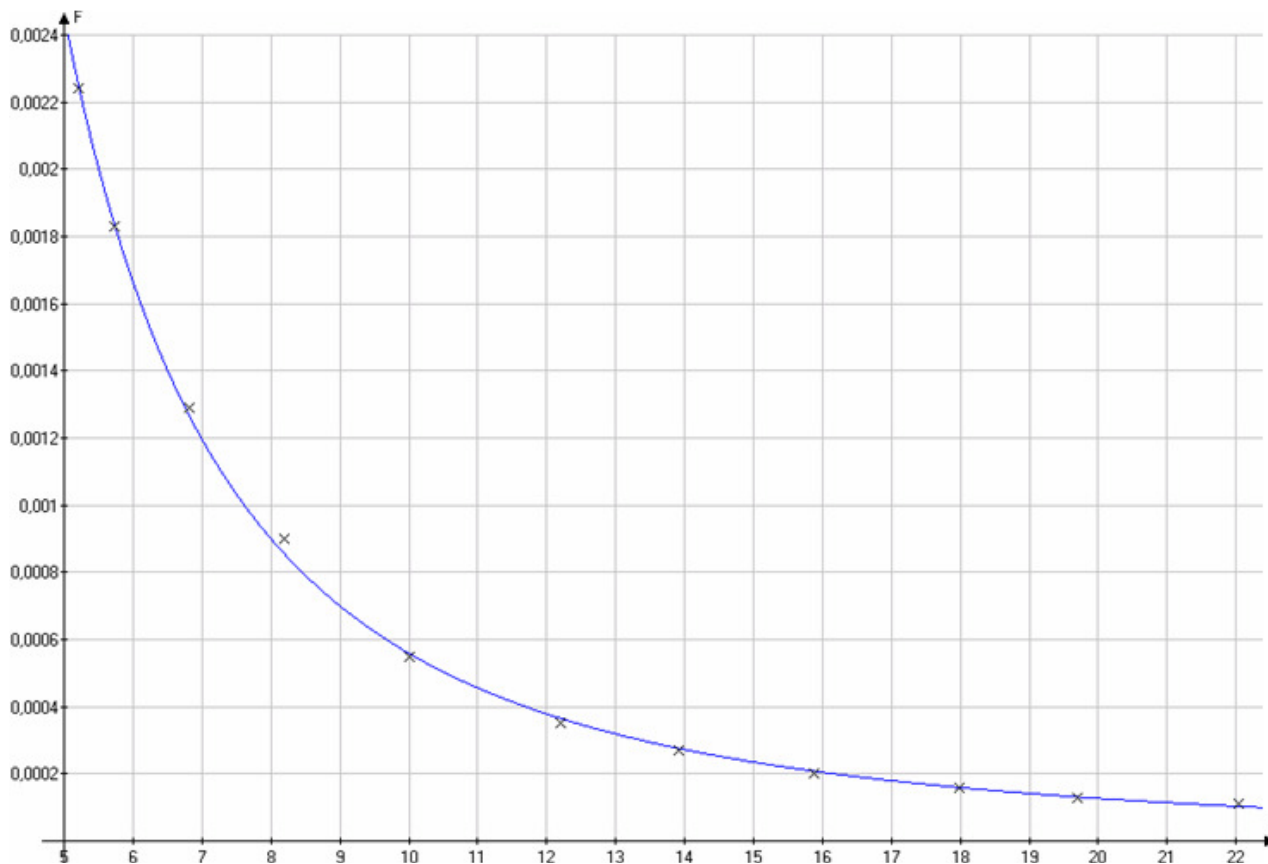


Fig. 14: Llei de força *versus* distància obtinguda amb una paràbola.



## Consideracions finals

Es pot proposar als alumnes fer diferents modificacions a l'experiència, com per exemple canviar els paràmetres de l'el·lipse i estudiar si això comporta modificar les conclusions finals.

Tanmateix es pot estudiar si en la mesura que més ens aproximem a la condició  $I \rightarrow H$ , millora l'aproximació a una llei de proporcionalitat a l'invers del quadrat de la distància.

## Bibliografia

- [1] Prentis, J, Bryan, F., Hesse, C., Mazzino, L. (2007). "Elliptical Orbit ==>  $1/r^2$  Force". *The physics teacher*. Vol 45, pp 20-25.
- [2] Goodstein, D., Goodstein, J. (1999). "La conferència perduda de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol". *Tusquets editores, Barcelona*.
- [3] Caamaño, A., Cortel A., Lozano, M.T., Pueyo L. (2004). "Física 2". *Editorial Teide, Barcelona*.
- [4] Caturla, E. i Vidal, F. (1997). "Física 2". *Editorial Castellnou, Barcelona*.
- [5] Martí, J., Ruiz, E., Fraile, J.M. "Física i Química. Crèdit comú 8". *Grupo Santillana, Barcelona*.

---

**Víctor Curcó**

Professor de l'IES La Roca, La Roca del Vallès.

Adreça electrònica: victor.curco@gmail.com